7.2 Matrices par blocs

On peut considérer les matrices comme simple tableau de nombres, mais il est parfois utile de faire apparaître certaines structures, comme par exemple les colonnes. On peut également partager les matrices en blocs et ainsi mettre en évidence des sous-matrices.

Exemple $A \in M_{3\times 7}(\mathbb{R})$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

$A_{11} \in M_{1\times 3}(\mathbb{R})$

$A_{12}, A_{13} \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$

$A_{21} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ etc.

On dit que A est de taille 2×3 par blocs

Addition et multiplication par un scalaire

Si $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ sont organisées en blocs de la même façon, on peut les additionner bloc par bloc.

$$A + B = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \hline B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & A_{13} + B_{13} \\ \hline A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & A_{23} + B_{23} \end{array}\right)$$

On multiplie de même, bloc par bloc, une matrice par un scalaire. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda A = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \lambda A_{13} \\ \hline \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \lambda A_{23} \end{array}\right)$$

Produit par blocs

On peut multiplier des matrices A et B par blocs en utilisant la règle habituelle ligne-colonne si le partage des colonnes de A correspond à celui des lignes de B :

Soient par exemple $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ des matrices par blocs

2×3 par blocs $\qquad\qquad$ 3×1 par blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c} B_{11} \\ \hline B_{21} \\ \hline B_{31} \end{array}\right)\begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{array}$$

$n_1 + n_2 + n_3 = n$

Alors le produit est donné par $\quad$ 2×1 par blocs $\quad$ produit "ligne-colonne" par blocs

$$AB = \left(\begin{array}{c} A_{11}\,B_{11} + A_{12}\,B_{21} + A_{13}\,B_{31} \\ \hline A_{21}\,B_{11} + A_{22}\,B_{21} + A_{23}\,B_{31} \end{array}\right)$$

Si A est $r\times s$ par blocs, B doit être $s\times t$ par blocs.

Exemple

$A \in M_{3\times 6}(\mathbb{R})$ $\qquad\qquad$ $B \in M_{6\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 3 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} 3 \\ \\ \\ 2 \\ \\ 1 \end{array}$$

$\qquad\qquad 3 \qquad 2 \qquad 1$

$$A_{11}B_{11} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{13}B_{31} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

etc.

$$AB = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ 6 & 8 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cas particuliers Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Partition par lignes (m) | Partition par colonnes (n)

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{lgn}_1(A) \\ \vdots \\ \mathrm{lgn}_m(A) \end{pmatrix} \qquad \mathrm{lgn}_i(A)^T \in \mathbb{R}^n$$

$$A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n) \qquad \vec{a}_i \in \mathbb{R}^m$$
$$= (\mathrm{col}_1(A) \dots \mathrm{col}_n(A))$$

Application au produit matriciel

Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ des matrices. $\vec{b}_i \in \mathbb{R}^n$ ou $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$

1) $AB = A(\vec{b}_1 \dots \vec{b}_p) = (A\vec{b}_1 \dots A\vec{b}_p)$ $\quad A\vec{b}_i \in \mathbb{R}^m$ ou $M_{m\times 1}(\mathbb{R})$

2) $$AB = \begin{pmatrix} \overset{1\times n}{\mathrm{lgn}_1(A)} \\ \vdots \\ \mathrm{lgn}_m(A) \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \overset{1\times p}{\mathrm{lgn}_1(A)B} \\ \vdots \\ \mathrm{lgn}_m(A)B \end{pmatrix}$$

3) $$AB = \begin{pmatrix} \mathrm{lgn}_1(A) \\ \vdots \\ \mathrm{lgn}_m(A) \end{pmatrix} (\vec{b}_1 \dots \vec{b}_p)$$ produit "ligne-colonne"

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{lgn}_1(A)\vec{b}_1 & \dots & \mathrm{lgn}_1(A)\vec{b}_p \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{lgn}_m(A)\vec{b}_1 & \dots & \mathrm{lgn}_m(A)\vec{b}_p \end{pmatrix}$$

i^e ; j^e col

$(AB)_{ij} = \mathrm{lgn}_i(A)\vec{b}_j$ (prod. matrices)
$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$
$= \mathrm{lgn}_i(A)^T \cdot \vec{b}_j$ (prod. scalaire)

4) $$AB = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n) \overset{m\times p}{\begin{pmatrix} \mathrm{lgn}_1(B) \\ \vdots \\ \mathrm{lgn}_n(B) \end{pmatrix}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\overset{m\times 1}{(\vec{a}_k)}\ \overset{1\times p}{(\mathrm{lgn}_k(B))}}_{\text{matrice } m\times p} = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{col}_k(A))(\mathrm{lgn}_k(B))$$

développement "colonne-ligne" de AB

$$(\mathrm{col}_k(A))(\mathrm{lgn}_k(B)) = (\vec{a}_k)(\mathrm{lgn}_k(B))$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}}_{m\times 1} \underbrace{(b_{k1} \dots b_{kp})}_{1\times p} = \underbrace{C_k}_{m\times p}$$

$$(C_k)_{ij} = a_{ik} b_{kj}$$

$$AB = \sum_{k=1}^{n} C_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Donc on retrouve bien le produit matriciel connu : def. ligne-colonne

⚠ voir ex. moodle !

Matrices triangulaires et diagonales par blocs, inverses par blocs

Définition 71 (triangulaire supérieure, inférieure et diagonale par blocs). Une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est dite

1. triangulaire supérieure par blocs si $A_{ij} = 0, \forall j < i$:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \qquad A_{21} = 0$$

2. triangulaire inférieure par blocs si $A_{ij} = 0, \forall j > i$:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad A_{12} = 0$$

3. diagonale par blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \qquad A_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j$$

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure par blocs avec
$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$. Supposons A inversible d'inverse A^{-1} :

$$\begin{array}{ccc} & n_1 & n_2 \\ n_1 & A_{11} & A_{12} \\ n_2 & 0 & A_{22} \end{array}$$

$$0 \in M_{n_2\times n_1}(\mathbb{R})$$

$n_1 + n_2 = n$

Partitionnons A^{-1} de la même façon : $A^{-1} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{l} n_1 \\ n_2 \end{array}$. Alors

$$A A^{-1} = I_n = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right) \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) \end{array} = \left(\begin{array}{c|c} I_{n_1} & 0 \\ \hline 0 & I_{n_2} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{array}\right)$$

donc

$$\begin{cases} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_{n_1} & (1) \\ A_{22}B_{21} = 0 & (2) \\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 & (3) \\ A_{22}B_{22} = I_{n_2} & (4) \end{cases}$$

(3) $A_{11}^{-1}(A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}) = 0$

d'où $B_{12} + A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} = 0$

$$\Downarrow$$

$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}$

(4) $\Rightarrow$ A_{22} inversible d'inverse $B_{22} = A_{22}^{-1}$

(2) $A_{22}^{-1}(A_{22}B_{21}) = 0 = B_{21}$

(1) $A_{11}B_{11} = I_{n_1}$ $\Rightarrow$ A_{11} inversible d'inverse $B_{11} = A_{11}^{-1}$

Théorème 75. *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure par blocs. Alors si A_{11} et A_{22} sont inversibles, A est inversible et*

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}\cancel{B_{22}}\,A_{22}^{-1} \\ \hline 0 & A_{22}^{-1} \end{array}\right)$$

Exemples

1) $A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ Calculer A^{-1}.

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & (*) \\ 1 & 2 & \\ \hline 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \qquad (*) = -1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot 1/2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2)

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline A_{n\times n} & I_n \end{array}\right)}_{2n} 2n \cdot \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & E \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = I_n & (1) \\ AB + I_n D = 0 & (2) \\ C = 0 & (3) \\ AC + I_n E = I_n & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2) & A + D = 0 \Rightarrow D = -A \\ (4) & E = I_n \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la matrice inverse de $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$ s'écrit $\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -A & I_n \end{array}\right)$

7.3 Décomposition spectrale

Si A est une matrice symétrique, alors on peut l'écrire sous la forme $A = PDP^T$ pour P orthogonale et D diagonale. Autrement dit, on a

$P = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)$ les col. de P sont formées de vecteurs propres de A orthonormés

$D = (\lambda_1 \dots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A (non néc. distinctes mais toutes dans $\mathbb{R}$)

$$A = PDP^T = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)^T$$

$$= \underbrace{(\lambda_1 \vec{u}_1 \ \dots \ \lambda_n \vec{u}_n)}_{n \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{pmatrix}}_{n \times n}$$

dvpt "colonne-ligne" du produit

Ainsi, le développement "colonne-ligne" du produit matriciel permet d'écrire la décomposition suivante :

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{\vec{u}_i \vec{u}_i^T}_{n \times n} = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \ldots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T.$$

produit matriciel

Cette écriture est appelée *décomposition spectrale* de A car c'est une décomposition en éléments dépendant du *spectre* de A, c'est-à-dire de ses valeurs propres.

Remarque

Chaque terme $\lambda_i \vec{u}_i \vec{u}_i^T \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est de rang égal à 1. En effet :

Les colonnes de la matrice $\lambda_i \vec{u}_i \vec{u}_i^T$ sont colinéaires à $\vec{u}_i$: $(\forall 1 \leq i \leq n)$

$$\lambda_i \vec{u}_i \vec{u}_i^T = \lambda_i \underbrace{\begin{pmatrix} u_{1i} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{pmatrix}}_{\substack{n \times 1 \\ i^e \text{ colonne de } P}} \underbrace{(u_{1i} \dots u_{ni})}_{1 \times n}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_i u_{1i} u_{1i} & \cdots\cdots & \lambda_i u_{1i} u_{ni} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_i u_{ni} u_{1i} & \cdots\cdots & \lambda_i u_{ni} u_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{l'im. de } \lambda_i \vec{u}_i \vec{u}_i^T \text{ est de dimension 1, donc le rang vaut 1.}$$

i^e col. de P $\underbrace{}_{= \lambda_i u_{1i} \cdot \vec{u}_i}$ $\qquad$ i^e col. de P $\underbrace{}_{= \lambda_i u_{ni} \cdot \vec{u}_i}$

Chaque matrice $\underset{n \times n}{\vec{u}_i \vec{u}_i^T}$ est la matrice de la proj. orthogonale sur la droite vectorielle eng. par $\vec{u}_i$.

⚠ $\underset{1\times 1}{\vec{u}_i^T \vec{u}_i} \in \mathbb{R}$, égal à $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = 1$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(4-\lambda) - 4$$
$$= (\lambda - 8)(\lambda - 3)$$

$$\ker(A - 8I_2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker(A - 3I_2) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P^T = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

(colonnes de P : $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$)

⇒ Déc. spectrale de A : $\quad A = 8\, \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + 3\, \vec{u}_2 \vec{u}_2^T$

$$\vec{u}_1 \vec{u}_1^T = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{u}_1 & \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{u}_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 \vec{u}_2^T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \vec{u}_2 & \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{u}_2 \end{pmatrix}$$

$$A = 8 \begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$